ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

PHAN THỊ THẮM

ĐỊNH LÝ TƯƠNG GIAO CANTOR TRONG KHÔNG GIAN METRIC NÓN VÀ ỨNG DỤNG

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - 2018

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

– – – – – – – – – – –

PHAN THỊ THẮM

ĐỊNH LÝ TƯƠNG GIAO CANTOR TRONG KHÔNG GIAN METRIC NÓN VÀ ỨNG DỤNG

Ngành: TOÁN GIẢI TÍCH
Mã số: 8.46.01.02

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học
TS. BÙI THẾ HÙNG

Thái Nguyên - 2018

Lời cam đoan

Tôi xin cam đoan rằng nội dung trình bày trong luận văn này là trung thực và không trùng lặp với đề tài khác. Tôi cũng xin cam đoan rằng mọi sự giúp đỡ cho việc thực hiện luận văn này đã được cảm ơn và các thông tin trích dẫn trong luận văn đã được chỉ rõ nguồn gốc.

Thái Nguyên, tháng 4 năm 2018
Người viết luận văn

Phan Thị Thắm

Lời cảm ơn

Trước khi trình bày nội dung chính của luận văn, tôi xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới **TS. Bùi Thế Hùng**, người thầy tận tình hướng dẫn tôi trong suốt quá trình nghiên cứu để tôi có thể hoàn thành luận văn này.

Tôi xin trân trọng cảm ơn Ban Giám hiệu, khoa Toán cùng toàn thể các thầy cô giáo trường ĐHSP Thái Nguyên đã truyền thụ cho tôi những kiến thức quan trọng, tạo điều kiện thuận lợi và cho tôi những ý kiến đóng góp quý báu trong suốt quá trình học tập và thực hiện luận văn.

Bản luận văn chắc chắn sẽ không tránh khỏi những khiếm khuyết vì vậy rất mong nhận được sự đóng góp ý kiến của các thầy cô giáo và các bạn học viên để luận văn này được hoàn chỉnh hơn.

Cuối cùng xin cảm ơn gia đình và bạn bè đã động viên, khích lệ tôi trong thời gian học tập, nghiên cứu và hoàn thành luận văn.

Tôi xin chân thành cảm ơn!

Thái Nguyên, tháng 4 năm 2018

Tác giả

Phan Thị Thắm

Mục lục

Một số ký hiệu và viết tắt

$\mathbb{N}^*$	tập các số tự nhiên khác không
$\mathbb{R}$	tập các số thực
$\mathbb{R}_+$	tập số thực không âm
$\mathbb{R}_-$	tập số thực không dương
$\{x_n\}_{n\geq 1}$	dãy số
$\emptyset$	tập rỗng
$A := B$	A được định nghĩa bằng B
$A \subset B$	A là tập con của B
$A \not\subset B$	A không là tập con của B
$A \cup B$	hợp của hai tập hợp A và B
$A \cap B$	giao của hai tập hợp A và B
θ	véctơ gốc trong không gian Banach E
$A \backslash B$	hiệu của hai tập hợp A và B
$A \times B$	tích Descartes của hai tập hợp A và B
$\operatorname{int} A$	phần trong tôpô của tập hợp A
$\square$	kết thúc chứng minh

Mở đầu

Năm 2007, Huang và Zhang [10] lần đầu giới thiệu không gian metric nón bằng cách thay tập số thực $\mathbb{R}$ trong định nghĩa metric thông thường bằng một nón định hướng trong không gian Banach.

Định nghĩa: Giả sử X là tập khác rỗng và $\preceq$ là quan hệ thứ tự bộ phận trên không gian Banach E sinh bởi nón C xác định bởi: $x, y \in E; x \preceq y$ nếu $y - x \in C$. Ánh xạ $d : X \times X \to E$ được gọi là metric nón trên X nếu

(d1) $\theta \preceq d(x, y)$ với mọi $x, y \in X$ và $d(x, y) = \theta$ nếu và chỉ nếu $x = y$;

(d2) $d(x, y) = d(y, x)$ với mọi $x, y \in X$;

(d3) $d(x, y) \preceq d(x, z) + d(z, y)$ với mọi $x, y, z \in X$.

Khi đó (X, d) được gọi là không gian metric nón.

Sau đó các tác giả đã chứng minh một số định lý điểm bất động của ánh xạ co trong không gian này với nón chuẩn tắc. Năm 2008, Rezapour và Hamlbarani [14] đã chứng minh lại các kết quả của Huang và Zhang mà không cần tính chuẩn tắc của nón. Từ sau các công trình này đã có khá nhiều bài báo viết về vấn đề liên quan đến không gian này. Ngoài việc nghiên cứu Nguyên lý điểm bất động của ánh xạ co Banach và các mở rộng của chúng cho các không gian metric nón, người ta còn quan tâm đến các vấn đề sau đây trong lớp không gian này: Nguyên lý thác triển liên tục, Nguyên lý tương giao Cantor, Nguyên lý Baire về phạm trù, bổ sung đủ và một số tính chất về tôpô của không gian metric nón. Năm 2011 các tác giả Alnafei, Radenovic và Shahzad [2] đã chứng minh Định lý tương giao Cantor trong không gian metric nón với nón đa diện có phần trong khác rỗng trong không gian Banach. Sau đó, năm 2016 bằng phương pháp hội tụ theo nón của dãy, Jachymski và Klima [12] đã chứng minh Định lý tương giao Cantor trong không gian metric nón mà không cần tính đa diện của nón.

Mục đích của luận văn là giới thiệu lại một số kết quả nghiên cứu của các tác giả Jachymski và Klima [12] về định lý tương giao Cantor trong không gian metric nón bằng phương pháp hội tụ theo nón của dãy và ứng dụng vào định lý điểm bất động. Luận văn gồm phần mở đầu, hai chương nội dung, phần kết luận và tài liệu tham khảo.

Chương 1 chúng tôi trình bày một số vấn đề cơ bản về nón, không gian metric nón, sự hội tụ trong không gian metric nón và tính chất của lớp không gian này. Ngoài ra, trong chương này chúng tôi cũng trình bày nguyên lý điểm bất động của ánh xạ co trong không gian metric nón dưới giả thiết về tính chuẩn tắc cũng như không chuẩn tắc của nón K.

Chương 2 dành cho việc trình bày khái niệm c- hội tụ đều, sự hội tụ theo nón của dãy trong không gian metric nón và mối quan hệ giữa sự hội tụ theo nghĩa của Huang- Zhang và sự hội tụ theo nón của dãy. Nội dung chính của chương này là trình bày định lý tương giao Cantor trong không gian metric nón và ứng dụng của nó vào định lý điểm bất động của ánh xạ co suy rộng với hằng số co là một toán tử tuyến tính dương với bán kính phổ nhỏ hơn 1.

Chương 1

Không gian metric nón

Trong chương này, chúng tôi trình bày một số khái niệm và kết quả về nón trong không gian Banach, không gian metric nón và sự hội tụ trong không gian metric nón. Ngoài ra, chúng tôi còn trình bày một cách chi tiết định lý điểm bất động của ánh xạ co trong không gian metric nón dưới giả thiết nón chuẩn tắc và nón không chuẩn tắc. Một số ví dụ tính toán mô tả cho các kết quả cũng được trình bày. Các khái niệm và kết quả của chương này được chúng tôi trình bày dựa trên hai bài báo [10] và [14].

1.1 Nón trong không gian Banach

Định nghĩa 1.1.1. Cho X là không gian tuyến tính trên trường $\mathbb{K}$ với điểm gốc θ. Hàm $\|.\| : X \to \mathbb{R}$ được gọi là chuẩn trên X nếu

(i) $\|x\| \geq 0$ với mọi $x \in X$ và $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$.

(ii) $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$ với mọi $x \in X$ và $\lambda \in \mathbb{K}$.

(iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ với mọi $x, y \in X$.

Khi đó cặp $(X, \|.\|)$ được gọi là không gian định chuẩn.

Nhận xét. Mọi không gian định chuẩn là không gian metric với khoảng cách $d(x, y) = \|x - y\|$. Khoảng cách xác định như trên gọi là khoảng cách sinh bởi chuẩn.

Định nghĩa 1.1.2. Không gian định chuẩn X đầy đủ đối với khoảng cách sinh bởi chuẩn được gọi là không gian Banach.

Định nghĩa 1.1.3. Giả sử E là không gian Banach. Tập con K của E được gọi là nón nếu

(i) K là tập khác rỗng, đóng và $K \neq \{\theta\}$.

(ii) $ax + by \in K$ với mọi $x, y \in K$ và $a, b \geq 0$.

(iii) $K \cap (-K) = \{\theta\}$.

Ví dụ 1.1.4. Giả sử $E := \mathbb{R}^2$. Đặt

$$K := \{(x, y) \in E : x \geq 0, y \geq 0\}.$$

Khi đó K là nón trong E.

Định nghĩa 1.1.5. Giả sử nón $K \subset E$ với phần trong khác rỗng, ta định nghĩa quan hệ thứ tự bộ phận $\preceq$ trên E sinh bởi nón K như sau

$$x, y \in E : x \preceq y \text{ nếu } y - x \in K.$$

Nếu $x \preceq y$ và $x \neq y$ thì ta viết $x \prec y$. Nếu $y - x \in \operatorname{int} K$ thì ta viết $x \ll y$. Đôi khi ta viết $y \succeq x, y \succ x$ và $y \gg x$ lần lượt thay cho $x \preceq y, x \prec y$ và $x \ll y$.

Tập con $A \subset E$ được gọi là bị chặn trên nếu tồn tại $y \in E$ sao cho $x \preceq y$ với mọi $x \in A$. Tập con $A \subset E$ được gọi là bị chặn dưới nếu tồn tại $z \in E$ sao cho $z \preceq x$ với mọi $x \in A$. Một véctơ a được gọi là cận trên đúng của tập A nếu

(i) a là chặn trên của A, tức là $x \preceq a$ với mọi $x \in A$.

(ii) a là chặn trên nhỏ nhất của A, tức là nếu tồn tại $b \in E$ sao cho $x \preceq b$ với mọi $x \in A$ thì $a \preceq b$.

Ta kí hiệu cận trên đúng của tập A là $\sup A$.

Định nghĩa 1.1.6. Cho K là nón trong không gian Banach E. Ta nói rằng

(i) K là chuẩn tắc nếu tồn tại hằng số $\Lambda > 0$ sao cho

$$\theta \preceq x \preceq y \text{ kéo theo } \|x\| \leq \Lambda \|y\|.$$